

**บทที่ 1 เลขยกกำลังและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์****1. ความหมายของเลขยกกำลัง**

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad \text{จำนวน } n \text{ ตัว}$$

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง

เรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

เช่น 2^3 มี 2 เป็นฐาน และมี 3 เป็นเลขชี้กำลัง

5^4 มี เป็นฐาน และมี เป็นเลขชี้กำลัง

$\left(\frac{3}{2}\right)^2$ มี เป็นฐาน และมี เป็นเลขชี้กำลัง

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ มี เป็นฐาน และมี เป็นเลขชี้กำลัง

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \dots\dots\dots$

2) $-343 = \dots\dots\dots$

3) $0.00032 = \dots\dots\dots$

4) $0.125 = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

1) $(-2)^2 \times (-4)^2 = \dots\dots\dots$

2) $(-0.1)^3 \times (0.2)^5 = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาว่าจำนวนต่อไปนี้แทนจำนวนใด

1) $(0.2)^5 = \dots\dots\dots$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \dots\dots\dots$



3) $(-3)^5 = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1

1) $64 = \dots\dots\dots$

2) $729 = \dots\dots\dots$

3) $0.015625 = \dots\dots\dots$

2. การดำเนินการของเลขยกกำลัง

ทฤษฎีบท ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

เช่น $2^5 \cdot 2^2 = \dots\dots\dots$

เช่น $(3 \times 5)^2 = \dots\dots\dots$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

เช่น $(3^2)^4 = \dots\dots\dots$

เช่น $\frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{2})^3} = \dots\dots\dots$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6) $a^0 = 1$

เช่น $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)^6 = \dots\dots\dots$

เช่น $5^0 = \dots\dots\dots$, $(-\sqrt{11})^0 = \dots\dots\dots$



$$7) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เช่น} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \dots\dots\dots, \quad 2^{-3} = \dots\dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลสำเร็จของเลขยกกำลังในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1) \frac{5^4 \times 5^3}{5^7} =$$

$$2) \frac{2^4 \times 2^2}{2^8} =$$

$$3) \frac{5^5 \times 525}{5^{-2}} =$$

$$4) \frac{3^{-3} \times 3^5}{3^{-4}} =$$

ตัวอย่างที่ 6 จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$1) (x-2y+z)^5 \times (x-2y+z)^4 = \dots\dots\dots$$

$$2) 9^{m^4-m-2} \times 9^2 \times 9^{m+m^4} = \dots\dots\dots$$

$$3) \frac{7^{n^2-2n} \times 7^{3n+3}}{7^{2+n+n^2}} = \dots\dots\dots$$

$$4) \frac{a^{3n+2}}{b^{n-3}} \times \frac{b^{2n+3}}{a^{2n+2}} = \dots\dots\dots$$

$$5) [a^3(b^2+7)]^0 = \dots\dots\dots$$



6) $2^0 + 4^0 + 6^0 = \dots\dots\dots$

7) $\frac{2^{-3} + 3^{-4}}{9^{-2} + 8^{-1}} = \dots\dots\dots$

8) $\frac{2^{-5} \times 3^{-3}}{6^{-3} \times 2^{-2}} = \dots\dots\dots$

9) $(a^p)^q \times a^{q(r-p)} \times a^{r(p-q)} \dots\dots\dots$

10) $\frac{(x^{-2}y^{-1})^{-2}}{(x^{-3}y^{-2})^2} = \dots\dots\dots$

11) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \dots\dots\dots$

3. การนำไปใช้

3.1) การเขียนจำนวนในรูปสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ (scientific notation)

มีรูปทั่วไปเป็น $A \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq A < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

เช่น $625,000 = \dots\dots\dots$ $0.0125 = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

1) $600,000 = \dots\dots\dots$ 2) $208,000,000 = \dots\dots\dots$

3) $25,000 \times 2,000,000 = \dots\dots\dots$



4) $0.005 = \dots\dots\dots$

5) $0.00075 = \dots\dots\dots$

6) $0.000526 = \dots\dots\dots$

7) $300 \times 12,000 = \dots\dots\dots$

7) $0.00005 \times 0.00036 = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

1) $30,000 \times 0.0006 = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

2) $(5 \times 10^2) + (7 \times 10^2) + (6 \times 10^2) = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

3) $(4 \times 10^4) + (5 \times 10^3) + (6 \times 10^2) = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

4) $(4 \times 10^2) \times (5 \times 10^3) \times (6 \times 10^{-2}) = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 9 สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้แทนจำนวนใด

1) $6 \times 10^{-4} = \dots\dots\dots$

2) $1.2 \times 10^5 = \dots\dots\dots$



3) $5.415 \times 10^{-8} = \dots\dots\dots$

4) $3 \times 10^5 = \dots\dots\dots$

5) $6.7 \times 10^4 = \dots\dots\dots$

3.2 สมการเลขยกกำลัง

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ

$a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ (ทำฐานให้เท่ากันแล้วจับเลขชี้กำลังเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า x แทนจำนวนเต็มบวก และ $3^x = 243$ แล้ว x เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า y แทนจำนวนเต็มบวก และ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{32}$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า x และ y แทนจำนวนเต็มบวกที่ $4^x = 128$ และ $9^{x+y} = 27$ แล้ว $x+y$ เท่ากับเท่าใด



4. กรณีที่สอง

4.1) สมบัติของ \sqrt{a} เมื่อ $a \geq 0$

1. เมื่อ a แทนจำนวนจริงบวกใดๆ หรือศูนย์

รากที่สองของ a คือ จำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

2. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองราก คือ รากที่สองที่เป็นบวก

ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \sqrt{a} (เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า กรณีที่สองของ a) และรากที่สองที่เป็นลบ ซึ่งเขียนแทนด้วย $-\sqrt{a}$

เช่น 2 เป็นรากที่สองของ รากที่สองของ 4 คือ และ

-5 เป็นรากที่สองของ รากที่สองของ 25 คือ และ

$\sqrt{3}$ เป็นรากที่สองของ รากที่สองของ 3 คือ และ

$\sqrt{2}$ เป็นรากที่สองของ รากที่สองของ 2 คือ และ

3. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก $(\sqrt{a})^2 = a$ และ $(-\sqrt{a})^2 = a$

เช่น $(\sqrt{5})^2 = \dots\dots\dots$ $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \dots\dots\dots$

4. ถ้า $a \in R, n \in I^+$ และ $n > 1$ และ a มีรากที่ n แล้ว $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

เช่น $\sqrt[3]{3} = \dots\dots\dots$, $(16)^{\frac{1}{4}} = \dots\dots\dots$

5. ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ a เป็นจำนวนจริงใดๆที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

แล้ว $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

เช่น $8^{\frac{2}{3}} =$



6. ถ้า $a \in R$, $\sqrt[n]{a} \in R$ และ $m \geq 2$ ที่ทำให้ รากที่ m ของ $\sqrt[n]{a} \in R$ แล้ว $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

เช่น $\sqrt{\sqrt{3}} = \dots\dots\dots$, $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \dots\dots\dots$

ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนใดๆ คือระยะห่างระหว่างจำนวนนั้นกับ 0 บนเส้นจำนวน

ดังนั้น $\sqrt{a^2} = |a|$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $|a|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ a

เช่น $\sqrt{5^2} = \dots\dots\dots$ $\sqrt{(-3)^2} = \dots\dots\dots$ $-\sqrt{7^2} = \dots\dots\dots$

$-\sqrt{(-0.1)^2} = \dots\dots\dots$ $(-\sqrt{6})^2 = \dots\dots\dots$

4.2) การดำเนินการของจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สอง

1. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ เมื่อ $a \geq 0, b \geq 0$

เช่น $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \dots\dots\dots$

2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ เมื่อ $a \geq 0, b > 0$

เช่น $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{3}} = \dots\dots\dots$



ตัวอย่างที่ 13 จงหาผลสำเร็จของจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{8} = \dots\dots\dots$ 2) $7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{27} = \dots\dots\dots$

3) $\sqrt{125} + 3\sqrt{5} - \sqrt{20} = \dots\dots\dots$ 4) $(\sqrt{12} + \sqrt{3})(3\sqrt{27}) = \dots\dots\dots$

5) $\frac{6\sqrt{18} + \sqrt{8}}{2\sqrt{2}} = \dots\dots\dots$ 6) $3\sqrt{2}(5\sqrt{2} - \sqrt{8}) = \dots\dots\dots$

7) $(3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32})^2 = \dots\dots\dots$ 8) $\sqrt[3]{8} - \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = \dots\dots\dots$

9) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) =$

10) $\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \dots\dots\dots$



$$11) \frac{\sqrt{81} + \sqrt[3]{-64}}{\sqrt[4]{625}} =$$

$$12) \frac{(2^3)^2}{(-27)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{\sqrt{81}}{\sqrt[4]{(-2)^4}} =$$

ตัวอย่างที่ 14 จงแก้สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1) 4^x = 8^2$$

$$2) \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} = \frac{8}{27}$$

$$3) 5^{x+1} = 625$$

$$4) 9^{2x-1} = (27)^{\frac{1}{2}}$$

$$5) \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^x = \frac{27}{8}$$

$$6) 2^{\frac{x}{2}+1} = 8 \cdot 4^x$$



7) $3^{x^2-1} = 27$

8) $625^{x^2} = 5$

ตัวอย่างที่ 15 ถ้า $\left(\sqrt{\frac{25}{9}}\right)^x = \sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ และ $y = 4x$ แล้ว ค่าของ y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 8

ข. 2

ค. -2

ง. -8

ตัวอย่างที่ 16 ถ้า $9^x = \sqrt{3}$ และ $16^{-y} = \frac{1}{8}$ แล้ว ค่าของ $x+y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 2

ข. 1

ค. -1

ง. -2

ข้อสอบ O-NET จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

1) $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32})^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 60

ข. $60\sqrt{2}$ ค. $100\sqrt{2}$

ง. 200



2) $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\frac{13}{24}$

ข. $-\frac{5}{6}$

ค. $\frac{2}{3}$

ง. $\frac{19}{24}$

3) ค่าของ $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}} \cdot \frac{(18)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

ข. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

ค. 2

ง. 3

4) $(1-\sqrt{2})^2 (2+\sqrt{8})^2 (1+\sqrt{2})^3 (2-\sqrt{8})^3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. -32

ข. -24

ค. $-32 - 16\sqrt{2}$

ง. $-24 - 16\sqrt{2}$

5) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{3}{10}$

ข. $\frac{7}{10}$

ค. $\sqrt{5} - 2$

ง. $\sqrt{6} - 2$



6) $(\sqrt{18} + 2\sqrt{-125} - 3\sqrt[4]{4})^3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. -1000

ข. 1000

ค. $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$

ง. $5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

7) ค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. -1

ข. 1

ค. 3

ง. 5

8) อสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$

ข. $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$

ค. $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$

ง. $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$

9) ถ้า $\left(3 + \frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\frac{4}{9}$

ข. $-\frac{2}{9}$

ค. $-\frac{1}{9}$

ง. $\frac{1}{9}$

10) ถ้า $8^x - 8^{(x+1)} + 8^{(x+2)} = 228$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{3}$

ข. $\frac{2}{3}$

ค. $\frac{4}{3}$

ง. $\frac{5}{3}$

**เพิ่มเติม** โจทย์ท้าทายความสามารถ

- 1) ถ้า x เป็นคำตอบของสมการ $2^{3x-1} \cdot 6^x \cdot 25^{5x-1} = 75^x$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด
- 2) จงหาค่าของ $\frac{3^{n+4} - 6(3^{n+1})}{7(3^{n+2})} + \frac{6 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^{n+1} + 2^{n-1}}$
- 3) ผลสำเร็จของ $\frac{10(2^{n+1}) - 2^{n+3}}{5(2^{n+1}) - 24(2^{n-2})}$ เท่ากับเท่าใด
- 4) เลขโดดในหลักหน่วยของ $(7^{2009} \times 8^{2552})$ เท่ากับเท่าใด
- 5) จงหาค่าของ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}}$
- 6) ถ้า $2^{3x} = \frac{1}{5}$ แล้ว ค่าของ 8^{-4x} เท่ากับเท่าใด
- 7) ถ้า $a^x - a^{-x} = 4$ แล้ว ค่าของ $a^{2x} - a^{-2x}$ เท่ากับเท่าใด
- 8) จำนวน $16^{13} \times 5^{41}$ เมื่อเขียนในรูป $A \times 10^n$ โดยที่ $1 \leq A < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม ค่าของ n เท่ากับเท่าใด
- 9) $10^{15} \times 9^7$ เป็นกี่เท่าของ $15^{14} \times 8^4$
- 10) ถ้า $(A \times 10^6) + (2 \times 10^5) - (3 \times 10^4) + (300 \times 10^2) = 120 \times 10^4$ แล้ว A เท่ากับเท่าใด
- 11) คำตอบของสมการ $(6.86 \times 10^5)x - (7.14 \times 10^8) = (7.28 \times 10^5)x + (1.05 \times 10^8)$ เท่ากับเท่าใด
- 12) ถ้า $125^{-x} = 8$ แล้ว ค่าของ 5^{5x} เท่ากับเท่าใด
- 13) ถ้า $a^{2n} = 3$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\frac{a^{3n} + a^{-3n} + a^{5n} + a^{5n}}{a^n + a^{-n}}$ มีค่าเท่าใด
- 14) ผลสำเร็จของ $\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$ เท่ากับเท่าใด
- 15) ผลสำเร็จของ $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ เท่ากับเท่าใด
- 16) ผลสำเร็จของ $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ เท่ากับเท่าใด
- 17) ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7$ แล้ว ค่าของ $x^3 + \frac{1}{x^3}$ เท่ากับเท่าใด
- 18) กำหนดให้ $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} = 3 - 2\sqrt{2}$ ค่าของ $\frac{2^{6x} - 2^{-6x}}{2^{2x} - 2^{-2x}}$ เท่ากับเท่าใด
- 19) ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$ แล้ว ค่าของ $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2$ เท่ากับเท่าใด
- 20) กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + \frac{1}{x} = k$ จงหาค่าของ k ที่ทำให้ $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = 2704$